Corrigé partiel mars 2012
L3 SPC – Thermo Stat

(I)

1) Ensemble statistique permettant de décrire les propriétés thermodynamiques d'un système fermé en équilibre thermique avec un thermostat qui impose sa température T. 1

1 2) $Z = \sum_{(e)} e^{-\beta E_e}$ 1 3) $P_e = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_e}$

4) $\langle E^c \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{(e)} E_e e^{-\beta E_e} = \sum_{(e)} E_e P_e$ (E discrète) 1

$\langle E^c \rangle = \frac{1}{Z} \int_0^\infty \rho(E)\, E\, e^{-\beta E}\, dE$ (E continue) 1

5) $S^I = -k_B \sum_{(e)} P_e \ln P_e$

$= -k_B \sum_{(e)} \frac{1}{Z} e^{-\beta E_e} \ln\left(\frac{e^{-\beta E_e}}{Z}\right)$

$= -k_B \sum_{(e)} \frac{e^{-\beta E_e}}{Z} (-\beta E_e - \ln Z)$

$= +k_B \left[\sum_{(e)} \beta E_e e^{-\beta E_e}\right] + k_B \left[\sum_{(e)} e^{-\beta E_e} \frac{\ln Z}{Z}\right]$

$= k_B \beta \left[\sum_{(e)} E_e e^{-\beta E_e}\right] + k_B \left[\frac{\ln Z}{Z} \sum_{(e)} e^{-\beta E_e}\right]$ 1

$S^c = k_B \beta \langle E^c \rangle + k_B \ln Z = \frac{\langle E^c \rangle}{T} + k_B \ln Z$ 1

II) 1) $E = n(\varepsilon_0 + \varepsilon^*) + (N-n)\varepsilon_0$

$= n\varepsilon^* + N\varepsilon_0$ $n = \frac{E - N\varepsilon_0}{\varepsilon^*}$

2) $\Omega(N,n) = \frac{N!}{(N-n)!\, n!} = C_N^n$

3) $S^* = k_B \ln \Omega(N,n) = k_B \ln N! - k_B \ln (N-n)! - \ln n!$

$S^* = k_B \{ N\ln N - \cancel{N} - (N-n)\ln(N-n) + \cancel{(N-n)} - n\ln n + \cancel{n} \}$

$= k_B \{ N\ln N - (N-n)\ln(N-n) - n\ln n \}$

4) $$\frac{1}{T^*} = \left(\frac{\partial S^*}{\partial E}\right)_N = \left(\frac{\partial S^*}{\partial n}\right)_N \left(\frac{\partial n}{\partial E}\right)_N = \frac{1}{\varepsilon^*}\left(\frac{\partial S^*}{\partial n}\right)_N$$

$$\frac{1}{T^*} = \frac{k_B}{\varepsilon^*}\left\{ \ln(N-n) - (N-n)\frac{1}{(N-n)} - \ln n - \frac{n}{n}\right\}$$

$$\frac{\varepsilon^*}{k_B T^*} = \left\{ \ln(N-n) - \ln n \right\} = \ln\left(\frac{N-n}{n}\right)$$

5) $$\ln\left(\frac{N}{n} - 1\right) = \frac{\varepsilon^*}{k_B T^*} \Rightarrow \left(\frac{N}{n} - 1\right) = e^{\varepsilon^*/k_B T}$$

$$\frac{N}{n} = 1 + e^{\varepsilon^*/k_B T} \qquad n = \frac{N}{1 + e^{\varepsilon^*/k_B T}}$$

6) $T = 0K$ $\quad n = 0$

tous les atomes à l'état fondamental

1 seul état $\quad S^* = 0$

7) $k_B T << \varepsilon^*$ $\quad$ BT

$$e^{\varepsilon^*/k_B T} >> 1 \Rightarrow n = N\, e^{-\varepsilon^*/k_B T}$$

$n \to 0$, le nb d'atomes dans l'état excité est faible à BT entropie $S^* \to 0$

8) $k_B T >> \varepsilon^*$ HT, lim $(1 + e^{x}) \simeq 2 + x \simeq 2$

$x = \frac{\varepsilon^*}{k_B T} << 1 \qquad x \to 0$

$$n \simeq \frac{N}{2} \qquad S^* \to S^*_{max}$$

à haute température, il y a autant d'atomes à l'état fondamental qu'à l'état excité à cause de l'agitation thermique

entropie microcanonique est maximale

$$S^* = k_B \ln 2^N \simeq N k_B \ln 2$$